5 Spurtopologie, Initiale und Finale Topologie

41. *Eigenschaften der Spurtopologie (vgl. Vo. Prop. 5.4).*
Beweise Proposition 5.4 aus der Vorlesung, d.h. zeige folgende Eigenschaften der der Spurtopologie $\mathcal{O}|_Y$ auf der Teilmenge Y des topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$.

    (i) $U \in \mathcal{U}_x^Y \;\Leftrightarrow\; \exists\, W \in \mathcal{U}_x : \; U = W \cap Y$

    (ii) A abgeschlossen bzgl. $\mathcal{O}|_Y \;\Leftrightarrow\; \exists\, B$ abgeschlossen bezgl. $\mathcal{O}$: $A = B \cap Y$

    (iii) $\forall\, A \subseteq Y : \; \bar{A}^Y = \bar{A}^X \cap Y$

    (iv) Sei $(x_\lambda)_\lambda$ ein Netz in Y und $x \in Y$, dann gilt
    $$x_\lambda \to x \text{ bzgl. } \mathcal{O}|_Y \;\Leftrightarrow\; x_\lambda \to x \text{ bzgl. } \mathcal{O}$$

    (v) $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetig $\Rightarrow\;$ $f|_Y : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetig

42. *Innerers, Äußeres, Rand, Häufungs- und isolierte Punkte (vgl. Vo. Bem. 2.48).*
Betrachte als topologischen Raum $X = [-1, 2] \cup \{3\}$ mit der Spurtopologie von $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_\mathrm{n})$. Zeige für eine geeignete Teilmenge $A \subseteq X$, etwa $A = (0, 1] \cup \{2\} \cup \{3\}$, dass sämtliche mögliche Teilmengen der von A, A^c, A', $\mathrm{Isol}(A)$, ∂A induzierten Partition (vgl. Vo. 2.48) nichtleer sind. Gib für jede der Teilmengen einen ihrer Punkte an.

43. *Spurtopologie im Niemytzki-Raum (vgl. Vo. 2.26(iii)).*
Wie sieht die von der Niemytzki-Toplogie induzierte Toplogie auf der x-Achse aus?

44. *Vererbung topologischer Eigenschaften.*
Eine Eigenschaft (E) eines toplogischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ heißt *„erblich"* falls sie mit $(X, \mathcal{O})$ auch jeder Teilraum $(Y, \mathcal{O}|_Y)$ hat. Zeige

    (i) AA1 und AA2 sind erblich, Separabilität ist nicht erblich (*Hinweis:* Aufgabe 43).

    (ii) Separabilität vererbt sich auf alle $(Y, \mathcal{O}|_Y)$ mit Y offen in X.

45. *Produkttopologie.*
Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$ topologische Räume $(i \in I)$, pr_k die Projektion von $X := \Pi_{i \in I} X_i$ auf X_k $(k \in I;\; \mathrm{pr}_k : (x_i)_i \mapsto x_k)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein weiterer topologischer Raum.

    Zeige, dass eine Abbildung $f : Y \to X$ genau dann stetig bzgl. $\mathcal{O}_Y$ und der Produkttopologie auf X ist, wenn alle $\mathrm{pr}_k \circ f$ stetig sind.

    Anmerkung: Die $\mathrm{pr}_k \circ f$ sind gerade die „Komponentenfunktionen" f_k von f, wenn die Schreibweise $f(y) = (f_i(y))_i$ verwendet wird. Obige Eigenschaft ist neben Vo. Prop. 5.12 gerade der „Witz" der Produkttopologie! Überlege, was beim Beweis schiefgeht, falls X statt mit der Produkttopologie mit der Boxtopologie versehen wird.